绝密★启用前

2016年3月湖北省七市（州）教科研协作体高三联合考试

文科数学试题答案及评分参考

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数. 选择题不给中间分.

一、选择题

（1）A　（2）A　（3）D　（4）C　（5）C　（6）B

（7）C　（8）C　（9）B　（10）B　（11）B　（12）D

二、填空题

（13）$\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$　　（14）2

（15）$10\sqrt{39}$　　（16）$\frac{2}{\pi}$

三、解答题

（17）解：

（Ⅰ）$f(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}\cos x=2\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

由 $f(\alpha)=2$，得 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即$\alpha+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

于是 $\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{12}$，或$\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又由$\alpha\in[0,\pi]$，故$\alpha=\frac{5\pi}{12}$.

6分

（Ⅱ）若将 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），得到 $y=2\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，再将 $y=2\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 图象上所有点的横坐标向右平行移动 θ 个单位长度，得到 $y=2\sqrt{2}\sin(2x-2\theta+\frac{\pi}{3})$ 的图象.

由于 $y=\sin x$ 的图象关于直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）对称，

令 $2x-2\theta+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\theta+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

由于 $y=2\sqrt{2}\sin(2x-2\theta+\frac{\pi}{3})$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称，令 $\frac{k\pi}{2}+\theta+\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$，

解得 $\theta=-\frac{k\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

6 分

（18）解：

（Ⅰ）购物者的购物金额 x 与获得优惠券金额 y 的频率分布如下表：

x	$0.3\le x<0.5$	$0.5\le x<0.6$	$0.6\le x<0.8$	$0.8\le x\le 0.9$
y	50	100	150	200
频率	0.4	0.3	0.28	0.02

这 1000 名消费者获得优惠券金额的平均数为：

$$\frac{50\times400+100\times300+150\times280+200\times20}{1000}=96.$$

4 分

（Ⅱ）由获得优惠券金额 y 与购物金额 x 的对应关系，有

$P(y=150)=P(0.6\le x<0.8)=(2+0.8)\times0.1=0.28$,

$P(y=200)=P(0.8\le x\le0.9)=0.2\times0.1=0.02$,

从而，获得优惠券不少于 150 元的概率为

$P(y\ge150)=P(y=150)+P(y=200)=0.28+0.02=0.3$.

8 分

（19）解：

（Ⅰ）因为 D，E 分别为棱 AC，BC 的中点，所以 DE 是三角形 ABC 的中位线，所以 $DE\,//\,AB$. 又 $DE\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $DE\,//$ 平面 ABB_1A_1.

同理 $DG\,//$ 平面 ABB_1A_1，又 $DE\cap DG=D$，所以平面 $DEFG\,//$ 平面 ABB_1A_1.

6 分

（Ⅱ）当直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 容器侧面 AA_1B_1B 水平放置时，由（Ⅰ）可知，液体部分是直四棱柱，其高即为原直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 容器的高，即侧棱长 l.

当底面 ABC 水平放置时，设液面的高为 h，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则由已知条件可知，

$\triangle CDE\backsim\triangle ABC$，且 $S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{4}S$，所以 $S_{四边形ABED}=\dfrac{3}{4}S$.

由于两种状态下液体体积相等，所以 $V_{液体}=Sh=S_{四边形ABED}l=\dfrac{3}{4}Sl$，即 $h=\dfrac{3}{4}l$.

因此，当底面 ABC 水平放置时，液面的高为 $\dfrac{3}{4}l$.

6 分

（20）**解**：

（Ⅰ）由 $x^2+y^2+2x-15=0$，得 $(x+1)^2+y^2=4^2$，所以圆心为 $H(-1,\ 0)$，半径为 4.

连接 MA，由 l 是线段 AB 的中垂线，得 $|MA|=|MB|$，

所以 $|MA|+|MH|=|MB|+|MH|=|BH|=4$，又 $|AH|=2<4$.

故点 M 的轨迹是以 A，H 为焦点，4 为长轴长的椭圆 C，其方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

4 分

（Ⅱ）由直线 EF 与直线 PQ 垂直，可得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，于是

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

（1）当直线 PQ 的斜率不存在时，则直线 EF 的斜率为零，此时可不妨取

$P(1,\ \dfrac{3}{2})$，$Q(1,\ -\dfrac{3}{2})$，$E(2,\ 0)$，$F(-2,\ 0)$，

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=(1,\ -\dfrac{3}{2})\cdot(-3,\ \dfrac{3}{2})=-3-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{21}{4}$.

（2）当直线 PQ 的斜率为零时，则直线 EF 的斜率不存在，同理可得 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=-\dfrac{21}{4}$.

（3）当直线 PQ 的斜率存在且不为零时，则直线 EF 的斜率也存在，于是可设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$，则直线 EF 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$.

将直线 PQ 的方程代入曲线 C 的方程，并整理得

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，所以 $x_P+x_Q=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_P\cdot x_Q=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$.于是

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_P-1)(x_Q-1)+y_P\cdot y_Q=(1+k^2)[x_Px_Q-(x_P+x_Q)+1]$

$=(1+k^2)(\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}-\dfrac{8k^2}{3+4k^2}+1)=-\dfrac{9(1+k^2)}{3+4k^2}$，

将上面的k换成$-\dfrac{1}{k}$，可得$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=-\dfrac{9(1+k^2)}{4+3k^2}$. 所以

$$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=-9(1+k^2)(\frac{1}{3+4k^2}+\frac{1}{4+3k^2}).$$

令$1+k^2=t$，则$t>1$，于是上式化简整理可得

$$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=-9t(\frac{1}{4t-1}+\frac{1}{3t+1})=-\frac{63t^2}{12t^2+t-1}=-\frac{63}{\frac{49}{4}-(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2}.$$

由$t>1$，得$0<\dfrac{1}{t}<1$，所以$-\dfrac{21}{4}<\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}\le-\dfrac{36}{7}$.

综合（1）（2）（3）可知，所求$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}$的取值范围为$[-\dfrac{21}{4},-\dfrac{36}{7}]$.

8 分

（21）**解**：

（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a(1-n\ln x)}{x^{n+1}}$.

有$f'(1)=a$，又切线斜率为 1，故$a=1$.

由曲线$y=f(x)$过点$(1,0)$，有$f(1)=b=0$.

故$a=1$，$b=0$.

4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$，$f'(x)=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

令$f'(x)=0$，即$1-n\ln x=0$，解得　$x=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

当$0<x<\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$时，有$f'(x)>0$，得$f(x)$在$(0,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})$上是增函数；

当$x>\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$时，有$f'(x)<0$，得$f(x)$在$(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}},+\infty)$上是减函数.

故$f(x)$在$x=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$处取得最大值$f(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})=\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$.

4 分

（Ⅲ）$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. 由题意，存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得$g(x_0)=0$，

即$\log_c x_0=x_0^n$. 由对数换底公式，得$\dfrac{\ln x_0}{\ln c}=x_0^n$，即$\ln c=\dfrac{\ln x_0}{x_0^n}$.

由（Ⅱ）知，对$x_0\in(0,+\infty)$，有$\dfrac{\ln x_0}{x_0^n}\le\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$，即$\ln c\le\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$.

由于$\ln x$是增函数，得$c\le\mathrm{e}^{\frac{1}{n\mathrm{e}}}$，又$c>0$且$c\ne1$，

故c的最大值为$\mathrm{e}^{\frac{1}{n\mathrm{e}}}$.

4 分

（22）解：

（Ⅰ）证明：由 FG 是圆的切线，FDA 是圆的割线，所以 $FG^2 = FD \cdot FA$，

又 $FE = FG$，所以 $FE^2 = FD \cdot FA$，即 $\dfrac{FE}{FD} = \dfrac{FA}{FE}$，

又 $\angle EFD = \angle AFE$，有 $\Delta EFD \backsim \Delta AFE$，故 $\angle DEF = \angle EAF$.

又 $\angle DAB$ 和 $\angle DCB$ 都是弧 DB 上的圆周角，有 $\angle DEF = \angle EAF = \angle DCB$，

所以，$FE \parallel BC$.

5 分

（Ⅱ）由 $AB \perp CD$，得 $\angle AED = 90^\circ$，

有 $\angle EAD = \angle DEF = 30^\circ$，故 $\dfrac{ED}{AE} = \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\dfrac{AF}{FG} = \dfrac{AF}{FE} = \dfrac{AE}{ED} = \sqrt{3}.$

5 分

（23）解：

（Ⅰ）曲线 C_1 的普通方程为 $y = x^2, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$，直线 l 的普通方程为 $x + y = 2$，

联立 $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 4 \end{cases}$（舍去），

故直线 l 与曲线 C_1 的交点的直角坐标为 $(1, 1)$，其极坐标为 $(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4})$.

5 分

（Ⅱ）曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay = 0$，即

$(x + a)^2 + (y - a)^2 = 2a^2 (a > 0)$.

由直线 l 与 C_2 相切，得 $\dfrac{|-a + a - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$，故 $a = 1$.

5 分

（24）解：

（Ⅰ）由于 $a = 1$，故 $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1, \\ x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

当 $x < 1$ 时，由 $f(x) \geq \dfrac{1}{2}(x + 1)$，有 $1 - x \geq \dfrac{1}{2}(x + 1)$，解得 $x \leq \dfrac{1}{3}$；

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) \geq \frac{1}{2}(x+1)$，有 $x-1 \geq \frac{1}{2}(x+1)$，解得 $x \geq 3$.

综上，不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}(x+1)$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$.

5 分

（Ⅱ）当 $a < 2$ 时， $g(x)=\begin{cases} a-2, & x \leq a, \\ 2x-2-a, & a < x < 2, \\ 2-a, & x \geq 2. \end{cases}$ $g(x)$ 的值域 $A=[a-2,\ 2-a]$.

由 $A \subseteq [-1,3]$，得 $\begin{cases} a-2 \geq -1, \\ 2-a \leq 3, \end{cases}$ 解得 $a \geq 1$，又 $a < 2$，故 $1 \leq a < 2$；

当 $a \geq 2$ 时， $g(x)=\begin{cases} a-2, & x \leq 2, \\ 2x-2-a, & 2 < x < a, \\ 2-a, & x \geq a. \end{cases}$ $g(x)$ 的值域 $A=[2-a,\ a-2]$.

由 $A \subseteq [-1,3]$，得 $\begin{cases} 2-a \geq -1, \\ a-2 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $a \leq 3$，又 $a \geq 2$，故 $2 \leq a \leq 3$.

综上，所求 a 的取值范围为[1，3].

5 分